20/11

(E,ρ), $S\subseteq E$, $A\subseteq S$

(S,ρ_S) μ.χ. $\rho_S=\rho/S\times S$

$\rho: E\times E\to\mathbb{R}$

$S\times S\subseteq E\times E$

A ανοιχτό εν $S \Leftrightarrow (\exists B\subseteq E)$: B ανοιχτό εν E : $A=S\cap B$

K κλειστό εν $S \Leftrightarrow (\exists G\subseteq E)$: G κλειστό εν E : $K=S\cap G$

Ισχύει επίσης: $\bar{A}_S=S\cap\bar{A}_E$ κ $A^\circ_S\supseteq S\cap A^\circ_E$

Απόδειξη του $\bar{A}_S=S\cap\bar{A}_E$

Ισχύει: $x\in\bar{A}\Leftrightarrow(\exists(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν $A)$: $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu=x$

$x\in\bar{A}_S\Leftrightarrow x\in S\wedge(\exists(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν $A)$: $\rho_S-\lim x_\nu=x$ $\quad(\rho_S(x_\nu,x)=\rho(x_\nu,x))\Leftrightarrow$

$x\in S\wedge[(\exists(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν $A)$: $\rho-\lim x_\nu=x]\Leftrightarrow x\in S\wedge x\in\bar{A}_E\Leftrightarrow x\in S\cap\bar{A}_E$

Απόδειξη του $A^\circ_S\supseteq S\cap A^\circ_E$

A°_E ανοιχτό εν $E\Leftrightarrow S\cap A^\circ_E$ ανοιχτό εν $S \xrightarrow[\text{και περιέχεται στο } A]{A^\circ_S \text{ μέγιστο ανοιχτό εν } S} A^\circ_S\supseteq A^\circ_E\cap S$

Δεν ισχύει το αντίστροφο γιατί:

$E=(\mathbb{R},|\,|)$, $S=[0,2]$, $A=[0,1)=[0,2]\cap(-1,1)=S\cap B$ Άρα

A ανοιχτό εν $S\Rightarrow A^\circ_S=[0,1)$ Ενώ $A^\circ_E=A^\circ_{\mathbb{R}}=(0,1)$ άρα

$A^\circ_S=[0,1)\supset(0,1)=S\cap(-1,1)=S\cap A^\circ_E\Rightarrow A^\circ_S\supset S\cap A^\circ_E$ (δεν ισχύει το ίσον)

(E,ρ) μ.χ. $\tau(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ με $\tau: E\times E\to\mathbb{R}$, τ μετρική

Έστω $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν E

Ν.δ.ο. $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι ρ-συγκλίνουσα $\Leftrightarrow(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι τ-συγκλίνουσα

με τ, ρ ισοδύναμες μετρικές

Απόδειξη

($\Rightarrow$) $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι ρ-συγκλίνουσα, δηλ. $\rho-\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}x_\nu=x\in E\Leftrightarrow\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(x_\nu,x)=0$

$$\xrightarrow{\tau(x_\nu,x)=\frac{\rho(x_\nu,x)}{1+\rho(x_\nu,x)}}\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\tau(x_\nu,x)=\frac{\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(x_\nu,x)}{1+\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(x_\nu,x)}=\frac{0}{1+0}=0\Rightarrow\tau-\lim_{\nu\in\mathbb{N}}x_\nu=x$$

($\Leftarrow$) Έστω $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι τ-συγκλίνουσα, δηλ.

$(\exists x\in E)$: $\tau-\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}x_\nu=x\Rightarrow\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\tau(x_\nu,x)=0 \xrightarrow{\rho(x_\nu,x)=\frac{\tau(x_\nu,x)}{1-\tau(x_\nu,x)}}$

$$\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(x_\nu,x)=\frac{\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\tau(x_\nu,x)}{1-\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\tau(x_\nu,x)}=\frac{0}{1-0}\Rightarrow\rho-\lim x_\nu=x$$

$\rho(\alpha, A) = \inf_{x \in A} \rho(\alpha, x)$

i) Ν.δ.ο. $|\rho(\alpha,A) - \rho(\beta,A)| \leq \rho(\alpha,\beta)$

Απόδειξη (i)

$(\forall x \in A): \rho(\alpha,x) \leq \rho(\alpha,\beta) + \rho(\beta,x) \quad (*)$

$$\rho(\alpha,A) = \inf_{x\in A}\rho(\alpha,x) \overset{(*)}{\leq} \inf_{x\in A}\left[\rho(\alpha,\beta)+\rho(\beta,x)\right] = \rho(\alpha,\beta) + \inf_{x\in A}\rho(\beta,x) =$$
$$\rho(\alpha,\beta) + \rho(\beta,A) \Longrightarrow \rho(\alpha,A)-\rho(\beta,A) \leq \rho(\alpha,\beta)$$

Ομοίως $\rho(\beta,A)-\rho(\alpha,A) \leq \rho(\alpha,\beta)$ $\Big\} \Longrightarrow$

$|\rho(\alpha,A)-\rho(\beta,A)| \leq \rho(\alpha,\beta)$

ii) Ν.δ.ο. η συνάρτηση $f: E \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \rho(x,A)$ (για δοσμένο $A \subseteq E$) είναι ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη (ii)

$A \subseteq E \quad f(x) = \rho(x,A) \in \mathbb{R}$

$|f(x) - f(y)| = |\rho(x,A) - \rho(y,A)| \leq 1 \cdot \rho(x,y) < \varepsilon = \delta$ Άρα f ομ. συνεχής

iii) Δίδονται A, B μη κενά κλειστά σύνολα κ ξένα υποσύνολα ενός μ.χ. (E,ρ). Ν.δ.ο. ο τύπος $f(x) = \frac{\rho(x,A)-\rho(x,B)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$ ορίζει μία συνάρτηση $f: E \to \mathbb{R}$ και μάλιστα

α) f συνεχής

β) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$

γ) $-1 < f(x) < 1$, $x \in A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

Απόδειξη

$\rho(x,A) + \rho(x,B) = 0 \Longleftrightarrow \rho(x,A) = 0 = \rho(x,B) \Longleftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \xrightarrow{A,B \text{ κλειστά}}$
$x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow x \in A \cap B = \emptyset$, ΑΤΟΠΟ Άρα όντως ορίζει συνάρτηση.

α) Από (ii) οι $\rho(x,A)$ κ $\rho(x,B)$ είναι ομ. συνεχής $\Longrightarrow$ συνεχής
Άρα η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

β) $x \in A \Longrightarrow x \in \bar{A} \Longrightarrow \rho(x,A) = 0 \Longrightarrow f(x) = \frac{-\rho(x,B)}{\rho(x,B)} = -1$
Ομοίως και $x \in B \Longrightarrow f(x) = 1$

$x \in A^c \cap B^c \Longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow x \notin \bar{A} \wedge x \notin \bar{B} \Longleftrightarrow \rho(x,A) \neq 0 \neq \rho(x,B)$

Άρα $-(\rho(x,A)+\rho(x,B)) < \rho(x,A) - \rho(x,B) < \rho(x,A) + \rho(x,B)$

$\xrightarrow{\rho(x,A)+\rho(x,B) \neq 0} -1 < f(x) < 1$

(E,ρ) μ.χ. $\rho: E\times E \to \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, |\,|)$

$E\times E \ni x=(x_1, x_2)$
$E\times E \ni y=(y_1, y_2)$ με $d(x,y)=d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sqrt{\rho^2(x_1,y_1)+\rho^2(x_2,y_2)}$

Θέλω όταν $d(x,y)<\delta$ να ισχύει $|\rho(x)-\rho(y)|<\varepsilon$

Δηλ. -II- $d(x,y)<\delta$ να ισχύει $|\rho(x_1,x_2)-\rho(y_1,y_2)|<\varepsilon$

<u>Απόδειξη</u>

Ισχύει: $|\rho(x_1,x_2)-\rho(y_1,y_2)| \le \rho(x_1,y_1)+\rho(x_2,y_2) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Αρκεί $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$

$d(x,y)<\delta \Rightarrow \rho(x_1,y_1)=\sqrt{\rho^2(x_1,y_1)} \le \sqrt{\rho^2(x_1,y_1)+\rho^2(x_2,y_2)} < \delta$